OPTIMALNO UPRAVLJANJE

Žarko Zečević
Elektrotehnički fakultet u Podgorici
Univerzitet Crne Gore

Tema 2

Projektovanje povratne sprege po stanjima

Ishodi učenja:

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

- Primjenom direktnog metoda, Akermanove formule ili KKF podese polove spregnutog sistema na željenu vrijednost
- Odaberu odgovarajuće vrijednosti polova u skladu sa željenim performansama u frekvencijskom ili vremenskom domenu
- U prostoru stanja dizajniraju kontinualni/digitalni sistem automatskog upravljanja za stabilizaciju sistema i praćenje referentog signala
- U Simulinku simuliraju dizajnirani sistem upravljanja i analiziraju njegove performanse sa stanovišta greške u praćenju referentnog signala, uticaja poremaćaja i mjernog šuma

Povratna sprega po stanjima

Najveći broj modernih tehnika za dizajn regulatora se zasniva na konfiguraciji kod koje se koriste informacije o svim stanjima sistema, a ne samo o izlaznoj promjenljivoj. Umjesto zatvaranja srege po izlaznoj promjenljvoj i implementacije regulatora u direktnoj grani upravljačke petlje, upravljački signal se formira zatvaranjem sprege po stanjima, pri čemu se svako stanje množi sa realnim konstantnim koeficijentom.

Upravljački problemi se u literaturi najčešće dijele u dvije klase:

- Stabilazacija sistema (eng. regulation, stabilisation)
- Servo problemi (eng. reference tracking, servo)

Kod prve klase referentni signal je jednak nuli, i sistem treba održati u ekvilibrijumu pod uticajem raznih impulsnih poremećaja koji djeluju na sistem. U drugoj klasi problema sistem treba da prati referentnu komandu, odnosno referentni signal.

Povratna sprega po stanjima

Posmatrajmo kontinualni LTI sistem i problem stabilizacije:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t),\ \mathbf{x}(0) = \mathrm{x}_0$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}(\mathrm{t}).$$

Upravljački signal se formira zatvaranjem spege po stanjima sistema, odnosno po linearnom zakonu:

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(\mathrm{t}).$$

Na isti način se formira i digitalna povratna sprega:

$$u(n) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(n),$$

pri čemu se kao objekat upravljanja posmatra diskretizovani ZOH ekvivalent LTI sistema:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}_d\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}_d u(n),\ \mathbf{x}(0) = \mathrm{x}_0$$
$$y = \mathbf{C}_d\mathbf{x}(n).$$

Povratna sprega po stanjima

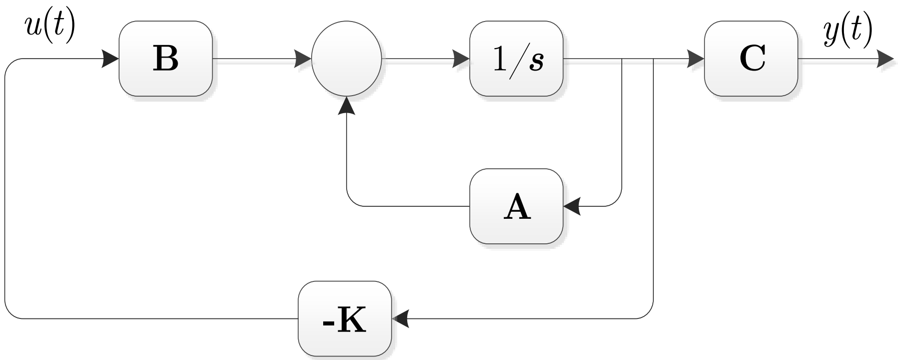
Nakon uvrštavanja izraza za upravljačke signale u polazne modele dobija se:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(0) = \mathrm{x}_0$$
$$y(t) = \mathbf{Cx}(\mathrm{t}).$$

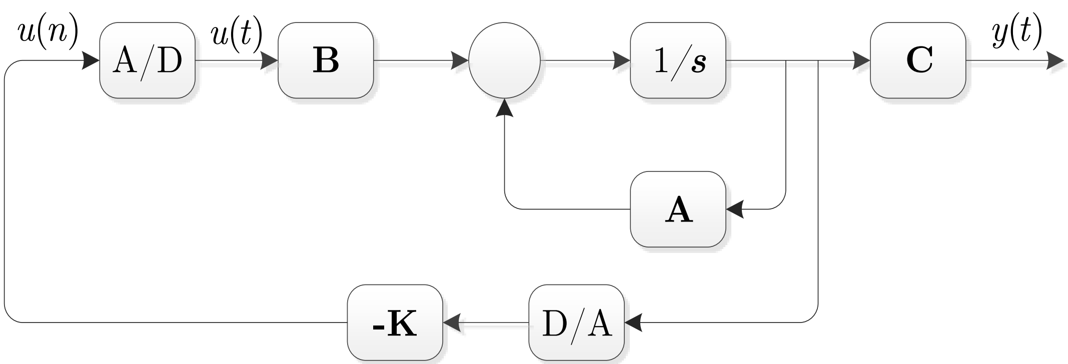
$$\mathbf{x}(n+1) = (\mathbf{A}_d - \mathbf{B}_d\mathbf{K})\mathbf{x}(n), \ \mathbf{x}(0) = \mathrm{x}_0$$
$$y(n) = \mathbf{C}_d\mathbf{x}(n).$$

Naš zadatak je da odredimo **K** tako da rezultujući sistem upravljanja ima željene performanse. Jasno je da stabilnost i performanse sistema zavise od sopstvnih vrijednosti matrice (**A**-**BK**) u kontinualnom slučaju, odnosno od sopstvenih vrijednosti matrice ($\mathbf{A}_d$-$\mathbf{B}_d\mathbf{K}$) u diskretnom slučaju. Može se pokazati, ukoliko je sistem kontrolabilan, da se koeficijenti **K** mogu odabrati tako da sopstvene vrijednosti spregnutog sistema imaju željenu vrijednost.

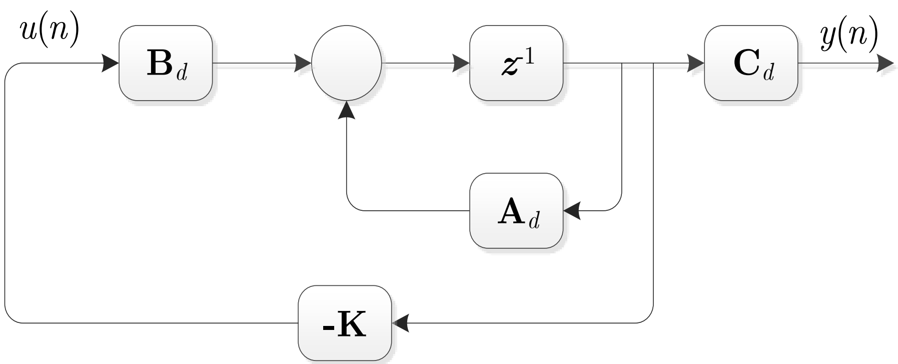
Povratna sprega po stanjima



Problem stabilizacije u kontinualnom vremenu



Problem stabilizacije u u hibridnom domenu



Problem stabilizacije u diskretnom vremenu

Metod postavljanja polova

- Metod postavljanja polova (eng. pole placement ili pole assigement) je postupak kojim se računa vektor pojačanja $\mathbf{K}$, na takav način da polovi ili sopstvene vrijednosti rezultujućeg spregnutog sistema imaju unaprijed specificirane vrijednosti.
- Polovi mogu biti postavljeni na željene vrijednosti jedino ako je sistem potpuno kontrolabilan. Ako sistem nije potpuno kontrolabilan, onda je potrebno da bude stabilizabilan, što znači da se nestabilni polovi sistema mogu postaviti na željene vrijednosti.
- Postoji nekoliko načina za podešavanje sopstvenih vrijednosti spregnutog sistema. Postupak postavljanja polova je najjednostaviji u slučaju kada je sistem zadat u obliku kontrolabilne kanonične forme.
- Postupak postavljanja polova je identičan za kontinualne i diskretne sisteme.

Postavljanje polova direktnim metodom

1. Izabrati željene lokacije polova (obično na osnovu nekog kriterijuma) – kompromis između propusnog opsega i osjetljivosti na šum.
2. Odrediti željeni karakteristični polinom spregnutog sistema:
$$f(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i).$$
3. Odrediti karakteristični polinom spregnutog sistema
$$f(\lambda) = \det\left[sI - \mathbf{A} + \mathbf{BK}\right].$$
4. Izjednačiti koeficijente uz odgovarajuće stepene polinoma iz 2. i 3. Na ovaj način se dobija n linearnih jednačina sa n nepoznatih koeficijenata koje treba odrediti.

Napomena: U gornjim jednačinama figuriše promjenljiva λ, što znači da su one jednako važe i za kontinualne i za diskretne sisteme. Dakle, postupak postavljanja polova za obje vrste sistema je identičan. Jedina razlika je u tome što, u cilju dobijanja sličnih performansi, polove kontinulanog i diskretnog sistema treba postaviti na različite vrijednosti.

Primjer – direktni metod

Sistem je zadat u prostoru stanja matricama:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & -2 & -1\\ 0 & -1 & -2\\ -3 & -2 & -1\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Odrediti vekor pojačanja **K**, tako da polovi spegnutog sistema budu -2, -1±2j. Simulirati odziv spregnutog sistema ako su početni uslovi $[1\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}}$.

Karakteristični polinom spregnutog sistema je:

$$f(\lambda)=\det\left[sI-\mathbf{A}+\mathbf{BK}\right]=\lambda^3+(k_1+2)\lambda^2+(2k_1-3k_3-6)\lambda-3k_1+6k_2-3k_3+9.$$

dok je željeni karakteristični polinom:

$$f(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)=(\lambda+2)(\lambda+1-2j)(\lambda+1+2j)=\lambda^3+4\lambda^2+9\lambda+10.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz stepene polinoma dobija se sistem jednačina:

$$\begin{aligned}&k_1+2=4,\\ &2k_1-3k_3-6=9,\\ &-3k_1+6k_2-3k_3+9=10.\end{aligned}$$

Primjer – direktni metod

Odnosno:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= 2, \\
2k_1 - 3k_3 &= 15, \\
6k_2 - 3k_3 &= 1.
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 2 \\ 15 \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

Rješavanjem sistem jednačina dobija se: k_1=2, k_2= -1.67, k_3 = -3.67, odnosno:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -0.67 & -3.67 \end{bmatrix}.$$

```
>> A=[0 -2 -1;0 -1 -2;-3 -2 -1]
>> B=[1;0;0];
>> syms l
>> expand((l+2)*(l+1-2j)*(l+1+2j))
>> syms k1 k2 k3
>> K=[k1 k2 k3]
>> collect(det(s*eye(3)-A+B*K))
>> P=[1 0 0;2 0 -3;-3 6 -3]
>> Q=[2;15;1]
>> inv(P)*Q
```

Postavljanje polova transformacijom u KKF

Neka je sistem zadat u kontrolabilnoj kanoničnoj formi:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}_{n\times n}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n\times 1}.$$

Matrica $\widetilde{\mathbf{A}}$ spregnutog sistema ima oblik:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix}.$$

Postavljanje polova transformacijom u KKF

Prethodni izraz se svodi na:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -k_1 & -k_2 & \dots & -k_{n-1} & -k_n \end{bmatrix}.$$

Može su uočiti da rezultujuća matrica $\widetilde{\mathbf{A}}$ takođe ima oblik kontrolabilne forme, pa se može uspostaviti veza između koeficijenata željenog karakterističnog polinoma $\tilde{\mathbf{a}}$, koeficijenata karakterističnog polinoma sistema u otvorenoj sprezi $\mathbf{a}$ i koeficijenata povratne sprege $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{a} + \mathbf{K} = \tilde{\mathbf{a}} \Rightarrow \mathbf{K} = \tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}.$$

Postavljanje polova transformacijom u KKF

Ako objekat upravljanja nije zadat u kontrolabilnoj kanoničnoj formi, tada se on može preslikati u KKF pomoću operatora $\mathbf{T}_c$:

$$\mathbf{T}_c = \overline{\mathbf{M}}_c \mathbf{M}_c^{-1}$$

gdje $\mathbf{M}_c$ predstavlja matricu kontrolabilnosti polaznog sistema, a $\overline{\mathbf{M}}_c$ matricu kontrolabilnosti zadatog sistema u kontrolabilnom kanoničnom prostoru.

Podsjetimo se da operator $\mathbf{T}_c$ preslikava stanja sistema u KKF na sljedeći način:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}_c \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{T}_c^{-1} \bar{\mathbf{x}}.$$

Kako je upravljački signal jednak:

$$u = -\mathbf{K}\bar{\mathbf{x}} = -\mathbf{K}\mathbf{T}_c \mathbf{x}.$$

to znači da, ukoliko sistem nije zadat u KKF, vektor $\mathbf{K}$ možemo direktno izračunati na sljedeći način:

$$\mathbf{K} = (\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a})\mathbf{T}_c.$$

Postavljanje polova transformacijom u KKF

Konačno, možemo rezimirati postupak podešavanja polova na željene vrijednosti:

1. Odrediti koeficijente karakterističnog polinoma objekta upravljanja na osnovu para $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$:
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix}.$$
2. Odrediti operator preslikavanja $\mathbf{T}_c$:
$$\mathbf{T}_c = \bar{\mathbf{M}}_c \mathbf{M}_c^{-1},$$
3. Odrediti koeficijente željenog karakterističnog polinoma:
$$\tilde{f}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) \;\Rightarrow\; \tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_0 & \tilde{a}_1 & \cdots & \tilde{a}_{n-1} \end{bmatrix}.$$
4. Izračunati vektor $\mathbf{K}$:
$$\mathbf{K} = (\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a})\mathbf{T}_c.$$

Primjer – PP transformacijom u KKF

Sistem je zadat u prostoru stanja matricama:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odrediti vekor pojačanja **K**, tako da polovi spegnutog sistema budu -2, -1±2j.

Karakteristični polinom sistema je:

$$f(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 6\lambda + 9.$$

dok je željeni karakteristični polinom spregnutog sistema:

$$f(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) = (\lambda + 2)(\lambda + 1 - 2j)(\lambda + 1 + 2j) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 9\lambda + 10.$$

Vektor pojačanja je jednak:

$$\mathbf{K} = (\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a})\mathbf{T}_c$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} \end{bmatrix}.$$

```
>> A=[0 -2 -1;0 -1 -2;-3 -2 -1];
>> B=[1;0;0];
>> syms l
>> f_=expand((l+2)*(l+1-2j)*(l+1+2j))
>> f=det(l*eye(3)-A)
>> a_=coeffs(f_); a=coeffs(f);
>> Mc=[B A*B A^2*B];
>> A_=[0 1 0;0 0 1;-a(1:end-1)]; B_=[0;0;1];
>> Mc_=[B_ A_*B_ A_^2*B_]; Tc=Mc_*inv(Mc);
>> K=(a_(1:end-1)-a(1:end-1))*Tc
```

Akermanova formula

Akermanova formula se izvodi na osnovu Cayley-Hamiltonove teoreme. Prema Cayley-Hamiltonovoj teoremi svaka matrica zadovoljava svoju karakterističnu jednačinu:

$$f(\tilde{\mathbf{A}}) = \tilde{\mathbf{A}}_n + a_{n-1}\tilde{\mathbf{A}}^{n-1} + \cdots a_1\tilde{\mathbf{A}} + a_0\mathbf{I}.$$

Neka je $\widetilde{\mathbf{A}}$=**A-BK** matrica spegnutog sistema. Ne gubeći na opštosti, posmatrajmo specijalni slučaj kada je n=3 (red matrice $\widetilde{\mathbf{A}}$). Prva tri stepena matrice $\widetilde{\mathbf{A}}$ su jednaka:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{BK} \\
&\tilde{\mathbf{A}}^2 = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^2 = \mathbf{A}^2 - \mathbf{ABK} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}} \\
&\tilde{\mathbf{A}}^3 = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^3 = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\left(\mathbf{A}^2 - \mathbf{ABK} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}\right) \\
&= \mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2\mathbf{BK} - \mathbf{ABK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}^2.
\end{aligned}$$

Akermanova formula

Uvrštavanjem prethodnih izraza u karakterističnu jednačinu dobija se:

$$
\begin{aligned}
f(\tilde{\mathbf{A}}) &= \tilde{\mathbf{A}}^3 + a_2\tilde{\mathbf{A}}^2 + a_1\tilde{\mathbf{A}} + a_0\mathbf{I} \\
&= \mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2\mathbf{BK} - \mathbf{ABK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}^2 + a_2\left(\mathbf{A}^2 - \mathbf{ABK} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}\right) + a_1\left(\mathbf{A} - \mathbf{BK}\right) + a_0\mathbf{I} \\
&= \mathbf{A}^3 + a_2\mathbf{A}^2 + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbf{I} - \mathbf{A}^2\mathbf{BK} - \mathbf{ABK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}} + a_2\left(\mathbf{ABK} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}\right) - a_1\mathbf{BK} \\
&= f(\mathbf{A}) - \mathbf{B}\left(a_1\mathbf{K} - \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2 - a_2\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}\right) - \mathbf{AB}\left(\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} + a_2\mathbf{K}\right) - \mathbf{A}^2\mathbf{BK}
\end{aligned}
$$

Prethodni izraz se svodi na:

$$
\tilde{f}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1\mathbf{K} - \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2 - a_2\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} \\ \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} + a_2\mathbf{K} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix}
$$

odakle slijedi:

$$
\begin{bmatrix} a_1\mathbf{K} - \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2 - a_2\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} \\ \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} + a_2\mathbf{K} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_c^{-1} f(\mathbf{A}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}_c^{-1} \tilde{f}(\mathbf{A}).
$$

Primjer – Akermanova formula

Sistem je zadat u prostoru stanja matricama:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & -2 & -1\\ 0 & -1 & -2\\ -3 & -2 & -1\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Odrediti vekor pojačanja **K**, tako da polovi spegnutog sistema budu -2, -1±2j.
Željeni karakteristični polinom spregutog sistema je:

$$f(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)=(\lambda+2)(\lambda+1-2j)(\lambda+1+2j)=\lambda^3+4\lambda^2+9\lambda+10.$$

Prema Akermanovoj formuli pojačanje **K** je jednako:

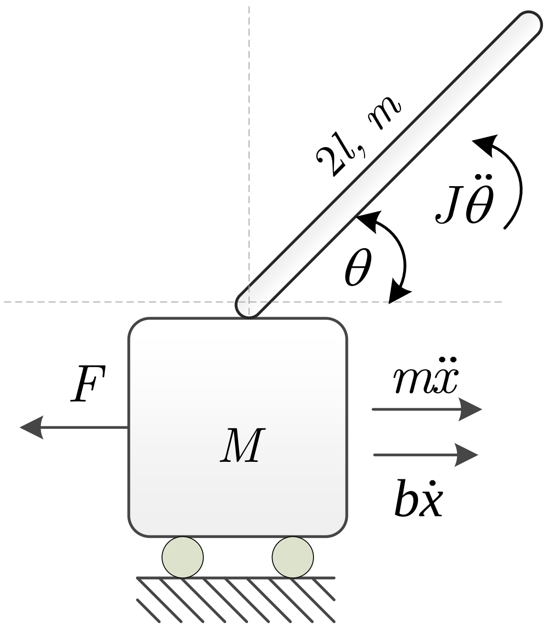
$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B}\end{bmatrix}^{-1}\left(\mathbf{A}^3+4\mathbf{A}^2+9\mathbf{A}+10\mathbf{I}\right)$$
$$=\begin{bmatrix}2.0000 & -0.6667 & -3.6667\end{bmatrix}.$$

```
>> A=[0 -2 -1;0 -1 -2;-3 -2 -1]
>> B=[1;0;0];
>> syms l
>> expand((l+2)*(l+1-2j)*(l+1+2j))
>> K = [0 0 1]*[B A*B A^2*B]^-1*[A^3 + 4*A^2 + 9*A + 10*eye(3)]
```

Primjer – inverzno klatno

Linearizovani model inverznog klatna je:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \ddot{x}\\ \dot{\theta}\\ \ddot{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{J+ml^2}{p} & \frac{m^2gl^2}{p} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -\frac{mlb}{p} & \frac{mgl(M+m)}{p} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\\ \theta\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{J+Ml^2}{p}\\ 0\\ \frac{ml}{p}\end{bmatrix}F$$

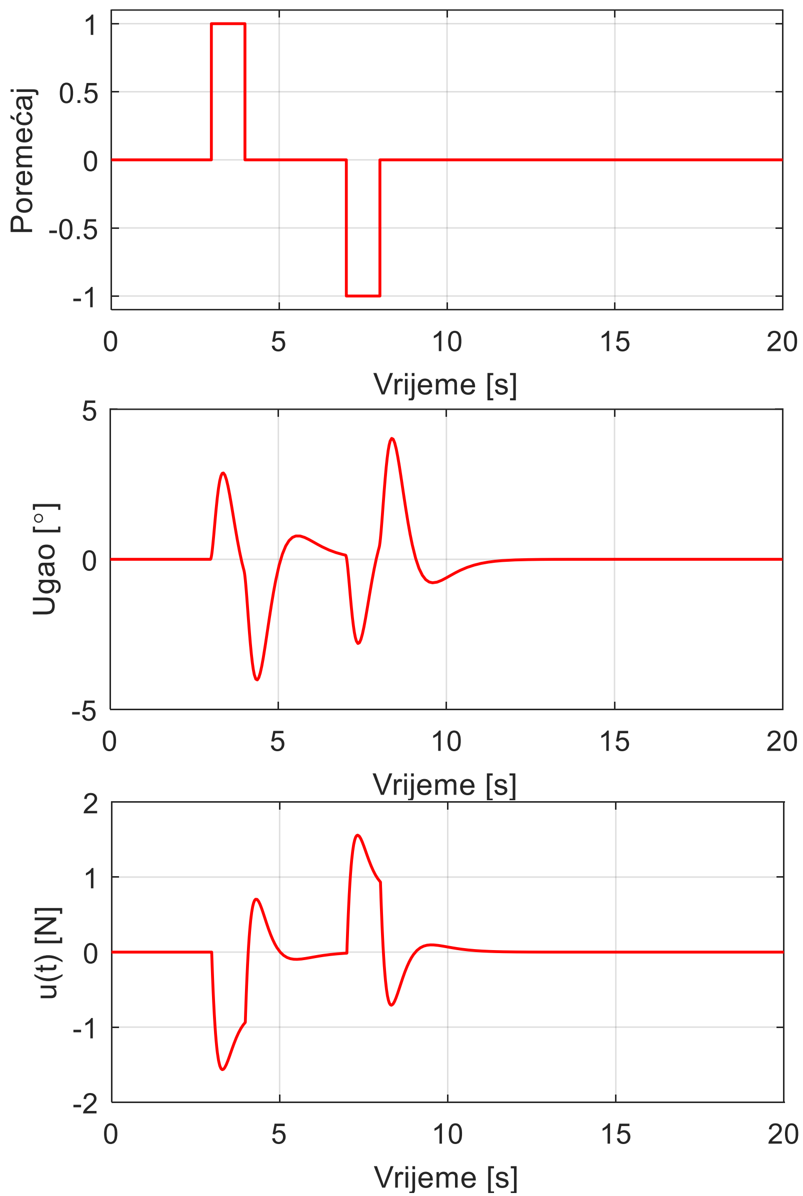


gdje je $p{=}J(M{+}m){+}Mml^2$.

Parametri klatna su: masa kola - $M = 0.5$ kg, masa štapa - $m = 0.2$ kg, koeficijent trenja podloge - $b{=}0.1$ $Nm/$s, moment inercije štapa - $J = 0.006$ Nkg/m^2, poludužina štapa - $l = 0.3$ m.

Projektovati povratnu spregu po stanjima tako da polovi spregnutog sistema imaju vrijednost [-2 -3 -4 -5]. Simulirati odziv spregnutog sistema ako na njegov ulaz djeluje poremećaj prikazan na narednom slajdu.

Primjer – inverzno klatno




```
>> M = 0.5;
>> m = 0.2;
>> b = 0.1;
>> J = 0.006;
>> g = 9.81;
>> l = 0.3;
>> p = J*(M+m)+M*m*l^2;
>> A = [0      1                0            0;
     0 -(J+m*l^2)*b/p   (m^2*g*l^2)/p   0;
     0       0               0            1;
     0 -(m*l*b)/p        m*g*l*(M+m)/p  0];
>> B = [     0;
     (J+m*l^2)/p;
          0;
        m*l/p];
>> K=acker(A,B,[-2 -3 -4 -5])
K =
      -2.6911      -3.5536       23.563
4.4614
```

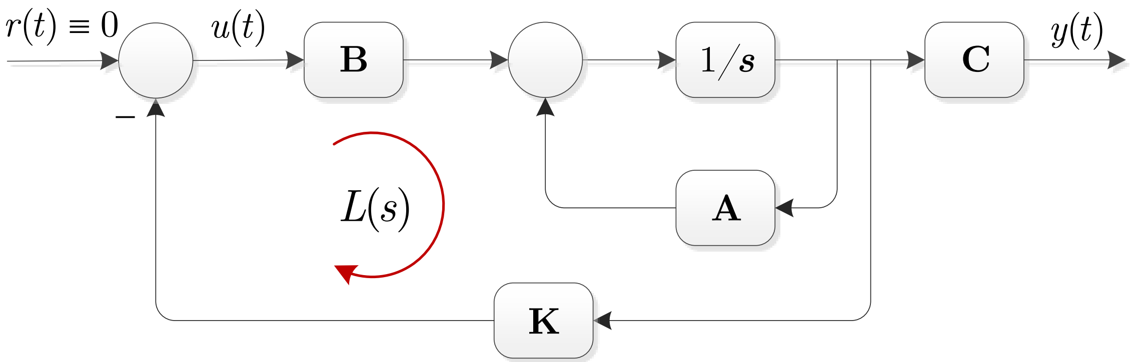
Na slikama lijevo su prikazani ugaoni pomjeraj klatna i vrijednost upravljačkog signala.

Margine stabilnosti

Marginama stabilnosti se izražavaju maksimalne dozvoljene peturbacije u parametrima modela sistema, pri kojima spregnuti sistema ostaje stabilan. Pretek pojačanja ili margina pojačanja je maksimalno pojačanje a_m koje se smije unijeti u direktnu granu, a da pritom spregnuti sistem bude stabilan, dok je pretek faze ili fazna margina γ_m maksimalno dozvoljeno fazno kašnjenje pri kojem spregnuti sistem ostaje stabilan. U klasičnoj konturi upravljanja, kod koje postoji jedna povratna sprega, margine stabilnosti se očitavaju sa Bode-ovog ili Nikvistovog dijagrama funkcije povratnog prenosa.

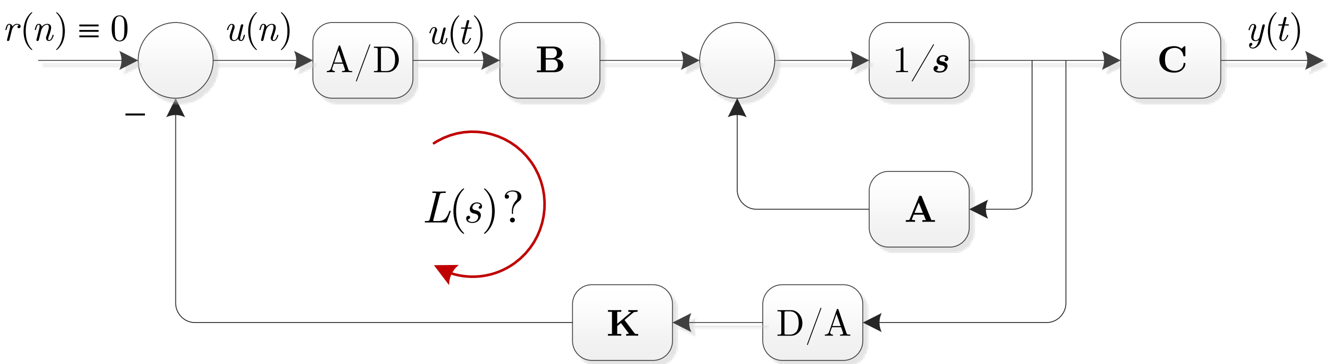
Da bi odredili i analizirali margine stabilnosti sistema spregnutog po svim stanjima, prethodno je potrebno modifikovati šemu upravljanja. kako bi odredili funkciju prenosa sistema u otvorenoj petlji $L(s)/L(z)$. Nakon toga treba skicirati frekvencijsku karakteristiku $L(j\omega)/L(e^{j\omega T})$ (Nikvistova kriva ili Bodeovi dijagrami) i odrediti margine stabilnosti.

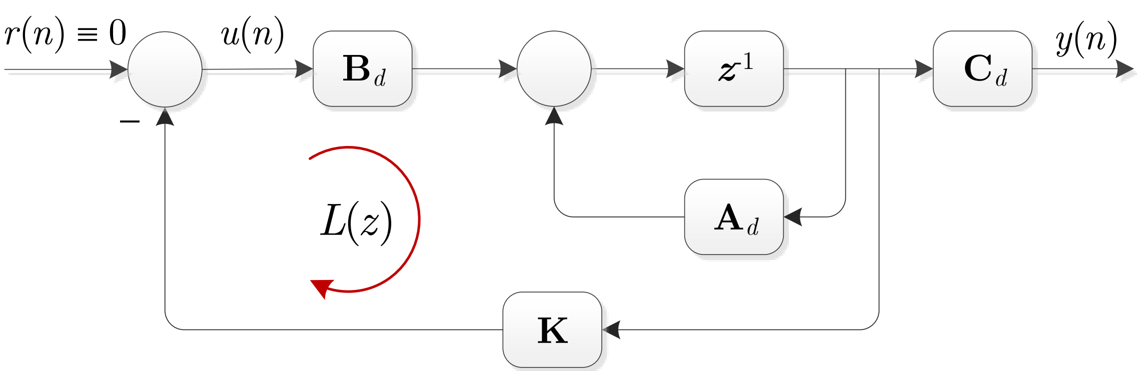
Margine stabilnosti



Funkcija povratnog prenosa

$$L(s) = \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$





$$L(z) = \mathbf{K}(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d)^{-1}\mathbf{B}_d$$

```
>> margin(L)
```

Odabir polova spregnutog sistema

Polovi spregnutog sistema se mogu odabrati tako što se prvo specificiraju željeno vrijeme smirenja i preskok, na osnovu čega se računa položaj dominantnih polova:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0,$$

$$s_{12} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}.$$

Preostale polove treba odabrati tako da njihov realni dio bude bar 4 puta veći od realnog dijela dominantnih polova (po apsolutnoj vrijednosti). Imaginarni dio preostalih polova ne treba značajno mijenjati, ukoliko ne želimo da upravljački signal ima previše velike vrijednosti.

Drugi način za odabir polova je na osnovu *tabela prototipa sistema*. Prototipi polova se računaju minimizacijom nekog optimizacionog kriterijuma, i u tabelama se mogu naći normalizovane vrijednosti polova, tj. vrijednosti koje obezbijeđuju propusni opseg od 1rad/s, ili vrijeme smirenja od 1sec u drugoj varijanti tabele.

Odabir polova spregnutog sistema

Najčešće se koriste dva kriterijuma za odabir polova. Prvi kriterijum se zasniva na minimizaciji sljedeće optimizacione funkcije:

$$J = \int_0^t t\left|e(t)\right| dt.$$

koja se u literaturi sreće pod nazivom ITAE (integral od proizvoda vremena i apsolutne vrijednosti signala greške). Polovi odabrani po ITAE kriterijumu obezbijeđuju dosta brz odziv, ali sa preskokom.

Prema drugom kriterijumu polovi se biraju tako da budu jednaki korijenima Beselovih polinoma, čime se obezbijeđuje odziv skoro preskoka, ali sporiji u odnosu na ITAE polove.

U tabelama na narednom slajdu su dati prototipi polova po ITAE i Bessel-om kriterijumu. Za oba kriterijuma prikazane su dvije odvojene tabele. Odabir polova po prvoj tabeli garantuje propusni opseg sistema od 1 rad/s, dok su vrijednosti polova iz druge tabele takve da obezbjeđuju vrijeme smirenja od 1sec.

Odabir polova spregnutog sistema

Ispod su date tabele sa prototipima polova.

ITAE pole locations for $\omega_o = 1$ rad/sec.

1:	-1.000		
2:	$-0.707 \pm 0.707j$		
3:	$-0.521 \pm 1.068j$	-0.708	
4:	$-0.424 \pm 1.263j$	$-0.626 \pm 0.414j$	
5:	$-0.376 \pm 1.292j$	$-0.576 \pm 0.534j$	-0.896
6:	$-0.310 \pm 0.962j$	$-0.581 \pm 0.783j$	$-0.735 \pm 0.287j$

ITAE pole locations for $t_s = 1$ sec.

1:	-4.620		
2:	$-4.660 \pm 4.660j$		
3:	$-4.350 \pm 8.918j$	-5.913	
4:	$-4.236 \pm 12.617j$	$-6.254 \pm 4.139j$	
5:	$-3.948 \pm 13.553j$	$-6.040 \pm 5.601j$	-9.394
6:	$-2.990 \pm 12.192j$	$-5.602 \pm 7.554j$	$-7.089 \pm 2.772j$

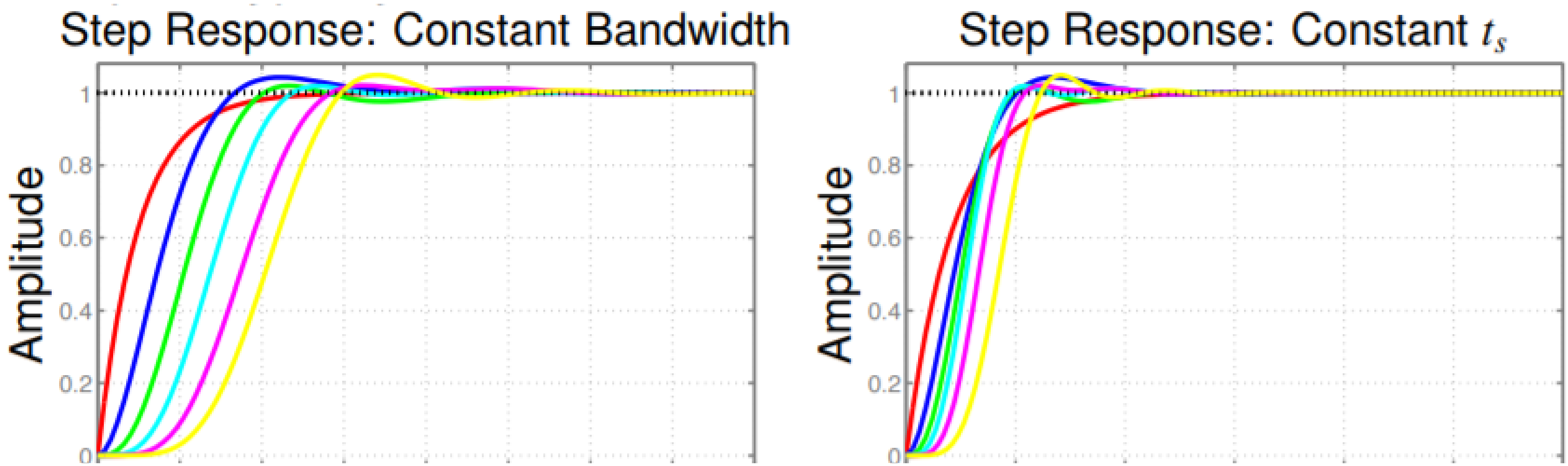
Bessel pole locations for $\omega_o = 1$ rad/sec.

1:	-1.000		
2:	$-0.866 \pm 0.500j$		
3:	$-0.746 \pm 0.711j$	-0.942	
4:	$-0.657 \pm 0.830j$	$-0.905 \pm 0.271j$	
5:	$-0.591 \pm 0.907j$	$-0.852 \pm 0.443j$	-0.926
6:	$-0.539 \pm 0.962j$	$-0.800 \pm 0.562j$	$-0.909 \pm 0.186j$

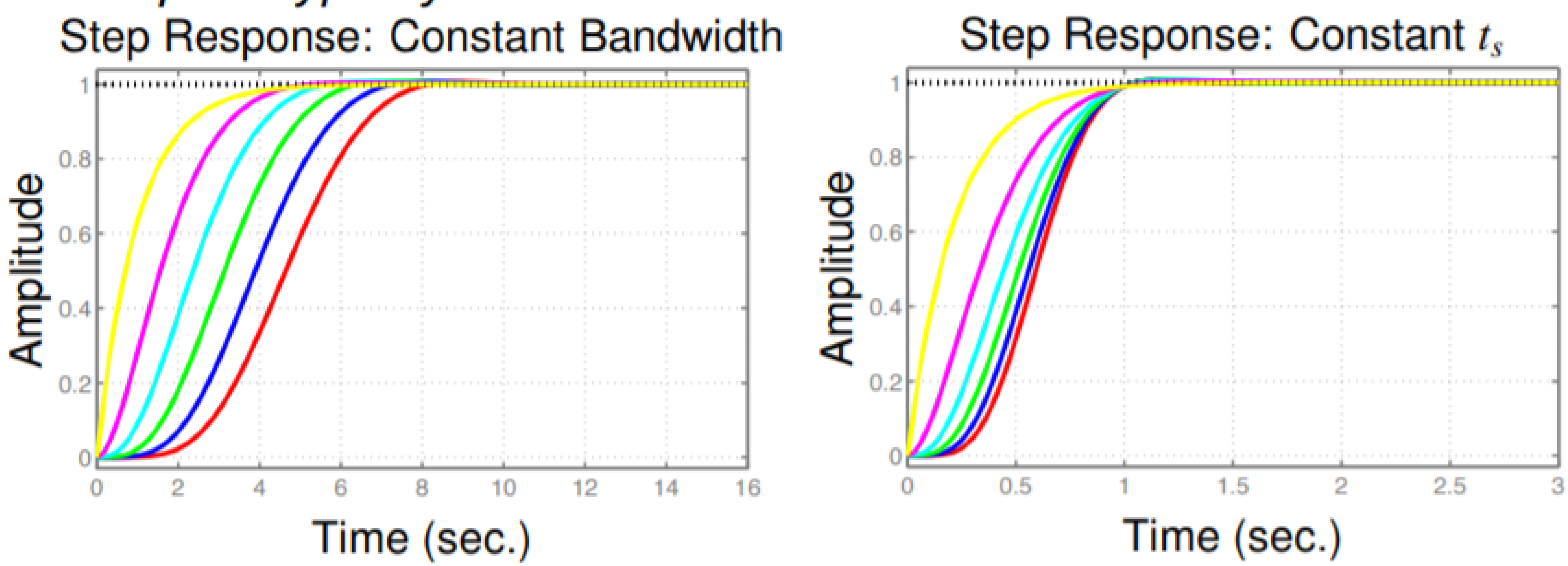
Bessel pole locations for $t_s = 1$ sec.

1:	-4.620		
2:	$-4.053 \pm 2.340j$		
3:	$-3.967 \pm 3.785j$	-5.009	
4:	$-4.016 \pm 5.072j$	$-5.528 \pm 1.655j$	
5:	$-4.110 \pm 6.314j$	$-5.927 \pm 3.081j$	-6.448
6:	$-4.217 \pm 7.530j$	$-6.261 \pm 4.402j$	$-7.121 \pm 1.454j$

Odabir polova spregnutog sistema



Bessel prototype systems



Odabir polova spregnutog sistema

U nastavku je opisana procedura za odabir polova prema ITAE/Bessel-ovom kriterijumu.

1. Specifikacija željenog propusnog opsega ω_0.
2. Pročitati vrijednosti polova iz tabele „constant bandwidth“, a zatim pomnožiti lokacije polova sa ω_0
3. Podesiti vrijednosti polova sa acker/place. Simulirati odziv spregnutog sistema i provjeriti kolika je vrijednost upravljačkog signala.

1. Specifikacija željenog vremena smirenja t_s
2. Pročitati vrijednosti polova iz tabele „constant t_s“, a zatim podijeliti lokacije polova sa t_s
3. Podesiti vrijednosti polova sa acker/place. Simulirati odziv spregnutog sistema i provjeriti kolika je vrijednost upravljačkog signala.

Odabir periode odabiranja

Prilikom dizajna digitalne povratne sprege prirodno je da se željene lokacije polova zadaju u s-domenu, jer je objekat kojim upravljamo kontinualan. Željeni polovi diskretnog sistema se nakon toga računaju po formuli:

$$z_i = e^{s_i T}.$$

Veza između polova kont. sistema i ZOH ekv.

Sljedeće pitanje koje se postavlja je - kolika treba da bude perioda odabiranja T tako da diskretni sistem ima približno iste performanse kao kontinualni sistem. Jasno je, da sa smanjivanjem periode odabiranja dobijamo ZOH ekvivalent koji vjernije apoksimira kontinualni sistem. Međutim, periodu odabiranja ne treba bespotrebno smanjivati jer to iziskuje skuplju implementaciju, a često neće dovesti do boljih performansi. Funkcija prenosa sistema spregnutog po svim stanjima vektorom $\mathbf{K}$ je jednaka:

$$G(s) = \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B},$$

dok se propusni opseg ω_B definiše na sljedeći način:

$$\left|G(j\omega_B)\right|_{dB} = \left|G(0)\right| - 3\text{dB}.$$

Odabir periode odabiranja

1. Ako se objekat upravljanja (ili senzori) nalazi u okruženju u kojem djeluju širokopojasne slučajne smetnje, tada (kružnu) frekvenciju odabiranja treba odabrati na sljedeći način:

$$20 \leq \frac{\omega_s}{\omega_{\mathrm{B}}} \leq 40.$$

2. Ako se objekat upravljanja ne nalazi u okruženju u kom djeluju širokopojasne smetnje, tada kružnu frekvenciju odabiranja treba usvojiti prema sljedećem pravilu:

$$5 \leq \frac{\omega_s}{\omega_{\mathrm{B}}} \leq 10.$$

Pod širokpojasnim smetnjama smatramo signale čiji je frekvencijski sadržaj veći od propusnog opsega sistema.

Voditi računa da je perioda odabiranja jednaka:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_s}.$$

Deadbeat upravljanje

Već nam je dobro poznato da ukoliko polove spregnutog sistema pomjeramo što lijevlje u s ravni, to će rezultujući sistem upravljanja brže reagovati na komandne signale, odnosno imaćemo kraće vrijeme smirenja. U ekstremnom slučaju ukoliko polove pomjerimo u beskonačnost (što nije moguće realizovati kod analognih sistema) dobićemo najbrži mogući sistem. Polovi koji leže u beskonačnosti u s-ravni se kod diskretnih sistema preslikavaju u koordinatni početak. Samim tim, karakteristični polinom diskretnog sistema sa najkraćim vremenom smirenja ima oblik:

$$f(z) = z^n.$$

Sistem upravljanja sa ovakvim odabirom karakterističnog polinoma diskretnog sistema se zove deadbeat kontroler. Deadbeat kontroleri konvergiraju ka nuli u n koraka, bez preskoka. Odnosno sa njima se može postići vrijeme smiranja od nT sekundi. Voditi računa da ovo može dovesti do velikih vrijednosti upravljačkih signala, naročito za malo T, što nekad nije moguće realizovati u praksi.

Primjer – DC motor

Parametri DC motora su: Projektovati digitalnu povratnu spregu po stanjima tako da vrijeme smiranja bude 1s. Koristiti ITAE kriterijum za odabir polova. Kako poremećaj utiče na performanse sistema? U drugom scenariju projektivati povratnu spregu tako da sistem ima deadbeat odziv. Uporediti vektore pojačanja **K** u oba slučaja, kao i odzive usljed djelovanja konstantnog poremećaja.

Praćenje referentnog signala

Prethodno je rečeno da se upravljački problemi mogu podijeliti u dvije klase: probleme stabilizacije i probleme praćenja referentnog signala. U slučaju stabilizacije sistema upravljački signal je oblika:

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(\mathrm{t}).$$

Ukoliko želimo da sistem prati referentni signal $r(t)$, potrebno je modifikovati upravljačku strukturu. Ne gubeći na opštosti, pretpostavimo da na izlazu mjerimo promjenljivu stanja x_1. Vektor povratne sprege možemo zapisati na sljedeći način:

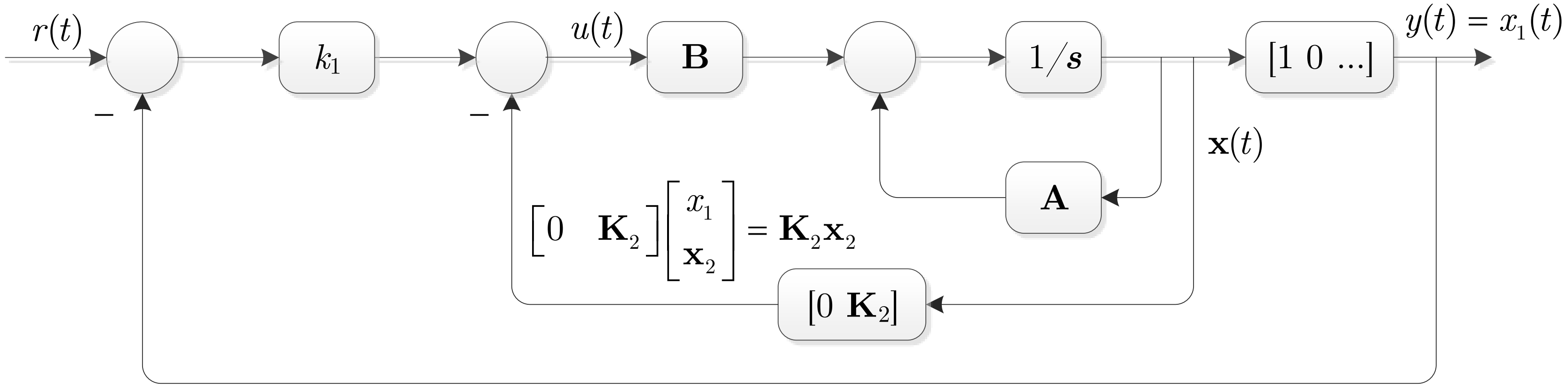
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix}.$$

a upravljački signal ćemo usvojiti da oblika:

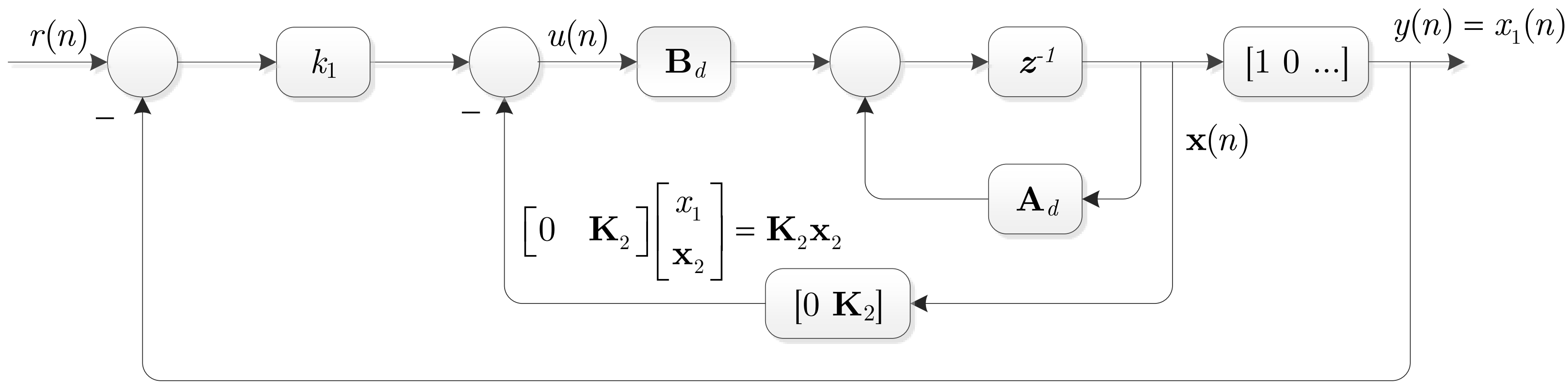
$$u(t) = k_1(r(t) - x_1) - \mathbf{K}_2\mathbf{x}_2(t) = k_1 r(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(\mathrm{t}).$$

U skladu sa definisanim zakonom upravljanja, može se skicirati upravljačka struktura slična klasičnoj upravljačkoj petlji za povratnom spregom po izlazu.

Praćenje referentnog signala



Praćenje referentnog signala u kontinualnom vremenu



Praćenje referentnog signala u diskretnom vremenu

Praćenje referentnog signala

Nakon uvrštavanja upravljačkog signala u model objekta upravljanja, dobija se sljedeće:

$$\boxed{\mathbf{e}_1 \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}k_1 r(t), \mathbf{x}(0) = \mathrm{x}_0,$$

$$y = \mathbf{e}_1^T \mathbf{x}(\mathrm{t}).$$

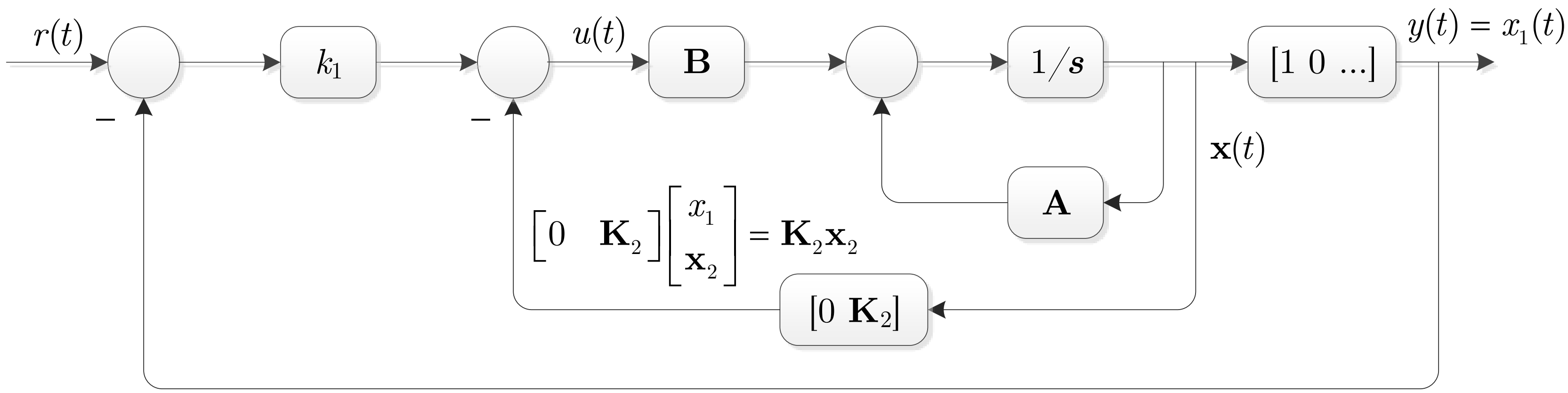
Posmatrajući model sistema u prostoru stanja može se uočiti da matrica **K** utiče na polove sistema na isti način kao kod problema stabilizacije, odnosno **K** se računa na osnovu željenih vrijednosti polova.

Međutim postavlja se pitanje – da li će na ovaj način u stacionarnom stanju sistem pratiti referentni signal bez greške, i ako hoće, u kojim sve slučajevima?

Ako se prisjetimo klasične teorije i ukoliko posmatramo sistem sa jedničnom povratnom spregom, znamo da će sistem pratiti konstantni signal bez greške ukoliko funkcija prenosa u otvorenoj petlji (f-ja prenosa objekta upravljanja i akutatora) sadrži astatizam.

Praćenje referentnog signala

Dakle, da bi sistem pratio referentni konstantni signal bez greške, funkcija prenosa unutar spoljne povratne sprege (funkcija povratnog prenosa) treba da ima astatizam prvog reda. Ili, pojačanje spregnutog sistema treba da bude jedinično (evkivalentan uslov).



$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\begin{bmatrix}0 & \mathbf{K}_2\end{bmatrix}\right)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}k_1 r(t),$$

$$y = \mathbf{e}_1^T\mathbf{x}(\mathrm{t}).$$

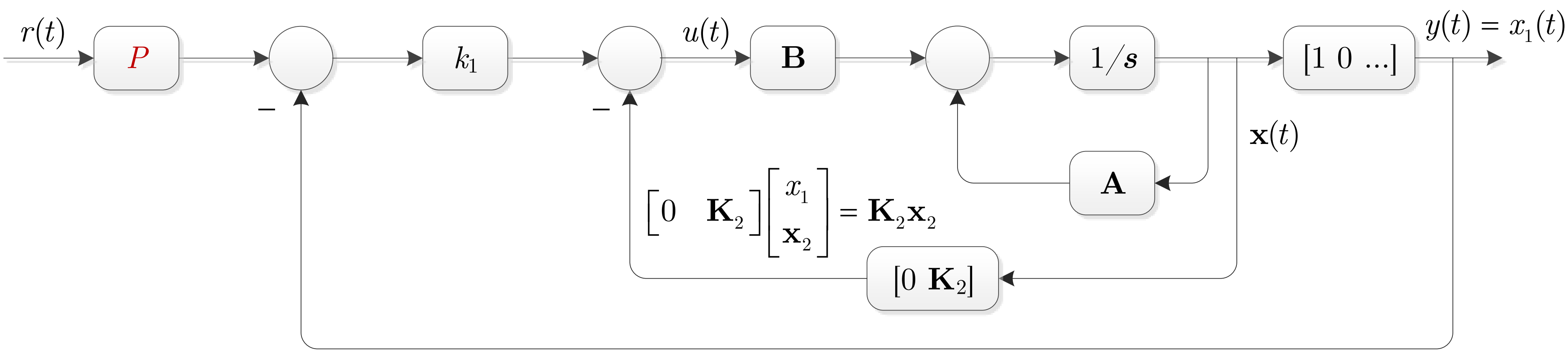
Model sistema sa raskinutom spoljnom petljom

Dakle, da bi sistem pratio step funkciju bez greške bar jedna sopstvena vrijednost matrice ($\mathbf{A}$-$\mathbf{B}[0\ \mathbf{K}_2]$) treba da bude jednaka nuli.

Sistem bez astatizma – Metod 1

Ukoliko funkcija povratnog prenosa sadrži astatizam, to znači da će pojačanje spregnutog sistema biti jedinično. Ukoliko ne postoji astatizam, onda ni pojačanje neće biti jedinično, te stoga sistem neće pratiti referentni signal bez greške. Postoje dva načina za smanjivanje greške u stacionarnom stanju na nulu. Kod prvog metoda treba modifikovati upravljački signal:

$$u(t) = k_1(Pr(t) - x_1) - \mathbf{K}_2\mathbf{x}_2(t) = k_1 Pr(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(\mathrm{t}).$$



Sistem bez astatizma – Metod 1

Koeficijent P treba odrediti iz uslova da ukupno pojačanje sistema bude jednako jedinici. Kako je model spregnutog sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}k_1 P r(t),$$

$$y = \mathbf{e}_1^T \mathbf{x}(\mathrm{t}).$$

funkcija prenosa spregnutog sistema biće jednaka:

$$G = \mathbf{e}_1^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{B}k_1 P.$$

Statičko pojačanje sistema je:

$$K_s = \lim_{s\to 0} = G(s) = \mathbf{e}_1^T (-\mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}k_1 P.$$

Dakle, koeficijent P treba odrediti iz uslova da je K_s=1.

Kod digitalnih sistema pojačanje sistema je jednako:

$$K_s = \lim_{z\to 1} = G(z) = \mathbf{e}_1^T (\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}k_1 P.$$

Sistem bez astatizma – Metod 2

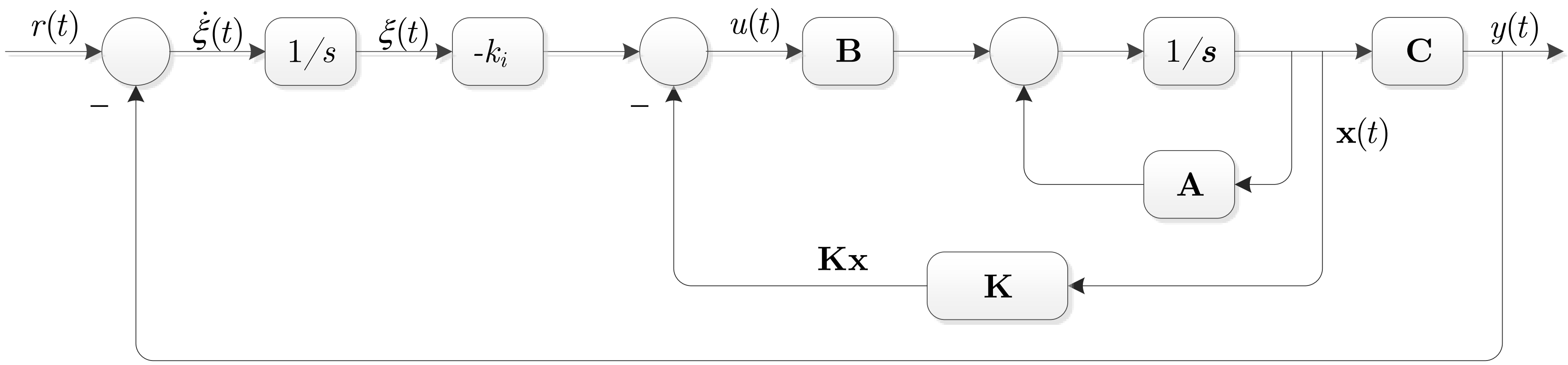
Metod koji je izložen zahtijeva poznavanje preciznog modela sistema kako bi odredili koeficijent P. Međutim u praksi to gotovo nikad nije moguće. Često poznajemo samo linearizovani model, ili se može desiti da se vremenom parametri sistema promijene, pa bi u tom slučaju bilo potrebno opet prepodesiti P.

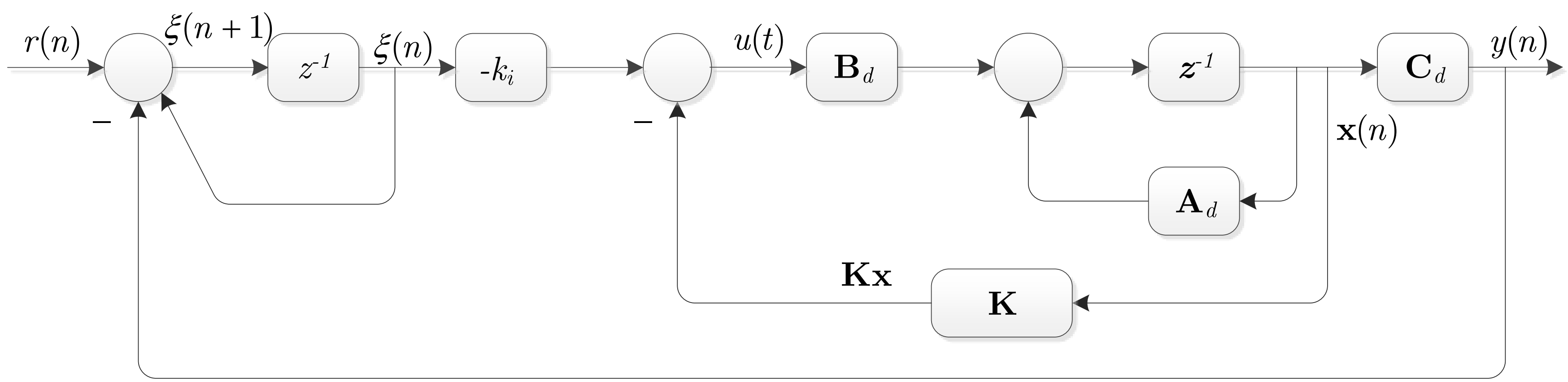
Stoga postoji još jedan način za svođenje greške na nulu – umetanjem integratora i direktnu granu. Na ovaj način se u model uvodi još jedno stanje i povećava red sistema, ali se omogućava praćenje konstantnog referentnog signala bez greške. Šema upravljanja sa integratorom, za kontinualne i diskretne sisteme, je prikazana na sljedećem slajdu. Voditi računa da je diskretna aproksimacija integratora:

$$\frac{1}{1-z^{-1}}.$$

Ovo znači da je f-ja koju integralimo aproksimarana stepenastim signalom. Ukoliko vas zanima numerička integracija, više informacija pronađite na internetu.

Sistem bez astatizma – Metod 2





Sistem bez astatizma – Metod 2

„Prošireni“ model kontinualnog sistema je (na osnovu šeme):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), u(t) = -k_i\xi(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t),$$
$$\dot{\xi}(t) = r(t) - y(t), y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t).$$

Prethodne jednačine, nakon sređivanja, možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K} & k_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t),$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}.$$

Na kraju, problem upravljanja se svodi na računanje proširenog vektora $[\mathbf{K}\ \ k_i]$ koji će sopstvene vrijednosti proširenog modela u prostoru stanja postaviti na željenu vrijednost.

Sistem bez astatizma – Metod 2

„Prošireni“ model diskretnog sistema se neznatno razlikuje:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}_d\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}_d u(n), u(n) = -k_i\xi(n) - \mathbf{K}\mathbf{x}(n),$$
$$\xi(n+1) = r(n) + \xi(n) - y(n), y(n) = \mathbf{C}\mathbf{x}(n).$$

Prethodne jednačine, nakon sređivanja, se mogu zapisati u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(n+1) \\ \xi(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(n) \\ \xi(n) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K} & k_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(n) \\ \xi(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(n),$$
$$y(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(n) \\ \xi(n) \end{bmatrix}.$$

Na kraju, problem upravljanja se svodi na računanje proširenog vektora $[\mathbf{K}\ \ k_i]$ koji će sopstvene vrijednosti proširenog modela u prostoru stanja postaviti na željenu vrijednost.

Primjer – brzinski servo

Model DC motora u prostoru stanja je:

$$\begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -k/L \\ k/J & -b/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix},$$

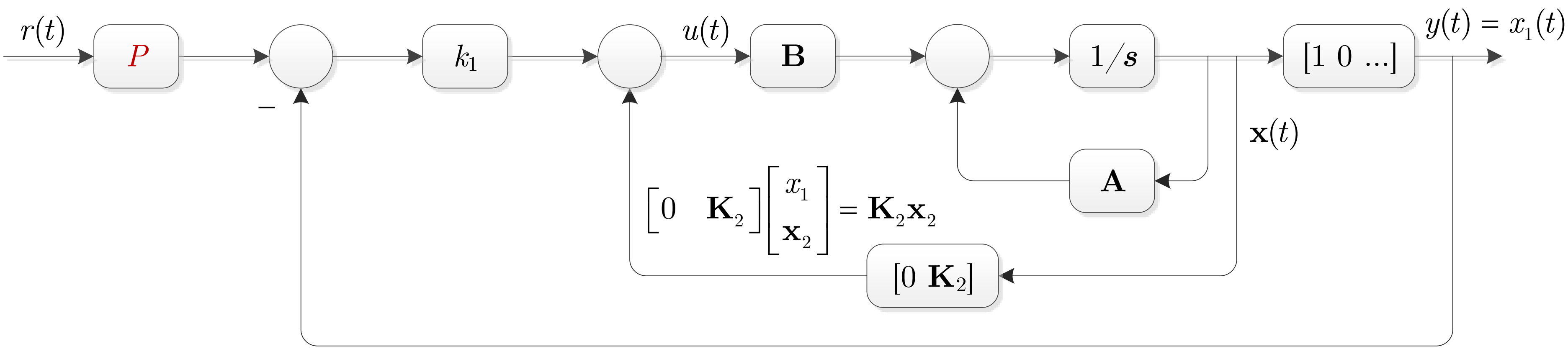
Parametri DC motora su: R = 9.5 Ω, L = 0.008 H, J = 2×10^{-3} kgm^2; b = 0.001 Nm/s, k = 0.04 Nm/A. Projektovati povratnu spregu po stanjima tako da vrijeme smirenja bude 1s, a da pritom greška u stacionarnom stanju bude jednaka nuli.

S obzirom da se radi o upravljanju brzinom motora, znamo da sistem u otvorenoj sprezi nema astatizam (`eig(A)`). Stoga, da bi grešku u stacionarnom stanju doveli na nulu moramo korisititi prefiltar (koeficijent P nakon referentnog signala), ili moram dodati integrator i time uvesti treće stanje. Zadatak će biti odrađen na oba načina. Takođe, biće odrađen i kontinualni i digitalni slučaj upravljanja. Ako koristimo prefiltar, onda ne treba mijenjati red sistema, pa ćemo polove spregnutog sistema odabrati iz ITAE tabele:

$$s_{12} = -4.66 \pm 4.66j.$$

Primjer – brzinski servo

Šema upravljanja je prikazana na slici ispod.



Voditi računa da se u gornjoj šemi podrazumijeva upravljanje promjenljivom x_1. To znači da prilikom simulacije treba prilagoditi šemu ili treba preurediti matrice modela, tako da prva promjenljiva bude ona kojom se upravlja, odnosno ugaona brzina u ovom slučaju. Vektor pojačanja **K** se dobija pomoću komande `acker`:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -8.7944 & 0.0749 \end{bmatrix}.$$

i $\qquad$ ω

```
R=9.5;
L=0.08;
J=2e-3;
b=0.001;
k=0.05;
A=[-R/L -k/L;k/J -b/J];
B=[1/L;0];
C=[0 1];
K=acker(A,B,[-4.66-4.66j;-
4.66+4.66j])
P=1/[C*(-A+B*K)^-1*K(2)*B]
```

Primjer – brzinski servo

Na kraju se računa koeficijent P, koji je inverzno proporcionalan statičkom pojačanju spregnutog sistema:

$$P = \frac{1}{K_s} = \frac{1}{\mathbf{C}(-\mathbf{A}+\mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}} = 1.8563.$$

Sada ćemo izvršiti projektovanje digitalne povratne sprege. Najprije treba odabrati adekvatnu periodu odabiranja T i ZOH ekvivalent sistema.

Funkcija prenosa spregnutog sistema je:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}k_1 P = \frac{43.4312}{s^2+9.32s+43.4312}.$$

Propusni opseg spregnutog sistema je 6.58 rad/s, pa ćemo usvojiti deset puta veću frekvenciju odabiranja, odnosno:

$$T = \frac{2\pi}{10\omega_b} = 0.09s.$$

Željeni polovi diskretnog sistema su:

$$z_i = e^{s_i T} = 0.6005 \pm 0.2677j.$$

```
>> s=tf('s');
>> ss1=ss(A-B*K,K(2)*B*P,C,0);
>> ws=bandwidth(ss1)
>> [a b]=ss2tf(A-B*K,B*K(2)*P,C,0)
>> T=2*pi/ws/10;
>> ssd=c2d(ss(A,B,C,0),T) % diskretni
>> Kd=acker(ssd.A,ssd.B, exp([-4.66-
4.66j;-4.66+4.66j]*T))
```

Primjer – brzinski servo

Vektor pojačanja **K** se računa na isti način kao kod kontinualnih sistema:

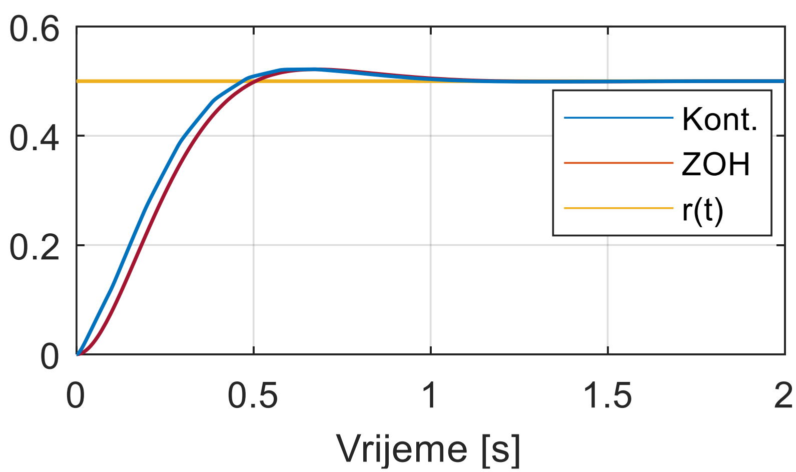
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.3110 & 0.0905 \end{bmatrix}.$$

Funkcija prenosa diskretizovanog spregnutog sistema je:

$$G(z) = \mathbf{C}_d (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}_d k_1,$$

pa je koeficijent prefiltra jednak:

$$P = \frac{1}{\lim\limits_{z\to 1} G(z)} = \frac{1}{\mathbf{C}_d (\mathbf{I} - \mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}_d k_1} =$$




```
>> s=tf('s');
>> ss1=ss(A-B*K,K(2)*B*P,C,0);
>> bandwidth(ss1)
>> [a b]=ss2tf(A-B*K,B*K(2)*P,C,0)
>> ssd=c2d(ss(A,B,C,0),T); % diskretni
>> Pd=1/(ssd.C*(eye(2)-
ssd.A+ssd.B*Kd)^-1*ssd.B*Kd(2))
>> Kd=acker(ssd.A,ssd.B, exp([-4.66-
4.66j;-4.66+4.66j]*Ts))
```

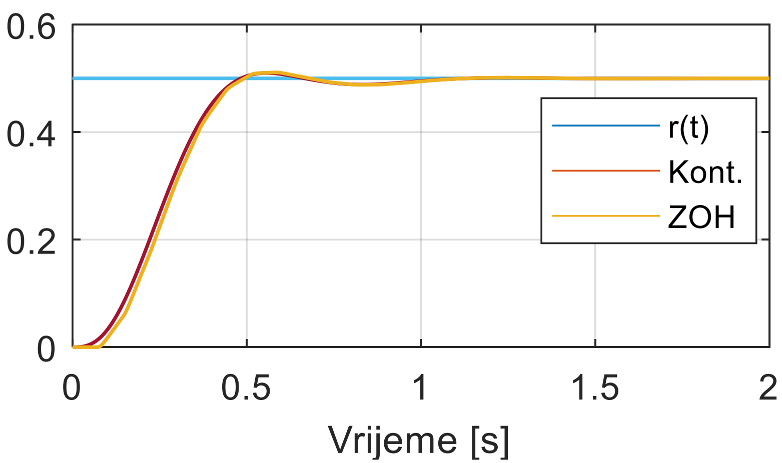
Primjer – brzinski servo

Tačnost sistema se može povećati i dodavanjem integratora u direktnu granu. Na taj način se dobija prošireni model sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K} & k_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t),$$

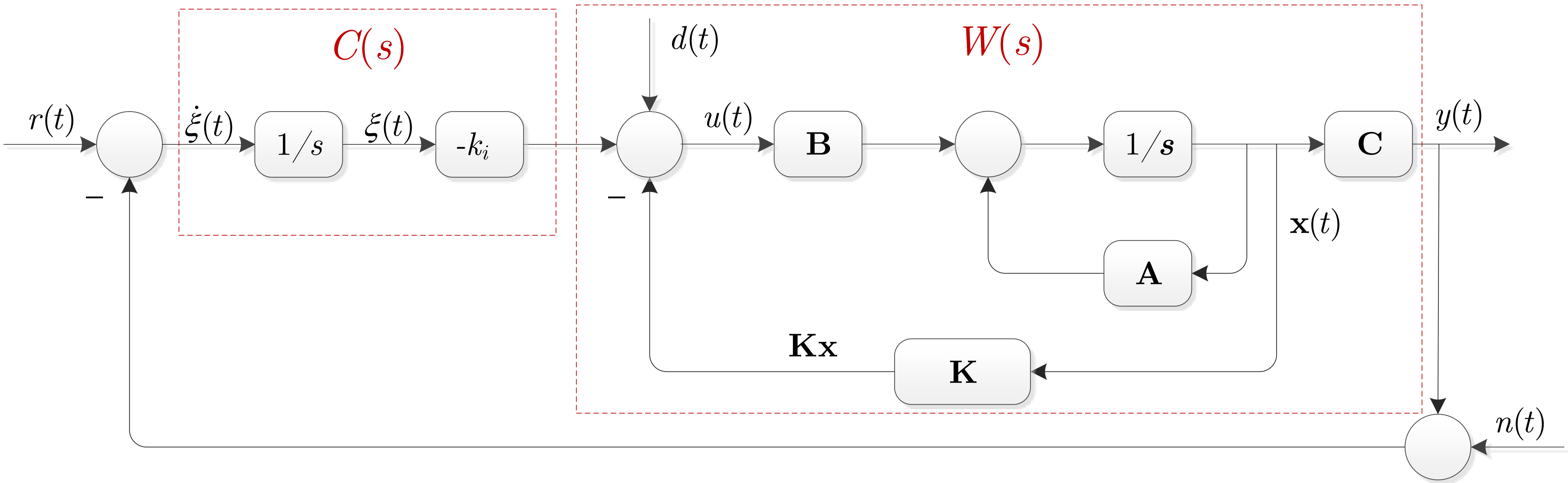
$$y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}.$$

U ovom slučaju je to model trećeg reda, pa iz ITAE tabele očitavamo sljedeće polove: -4.35±8.918j, -5.913. Vektor pojačanja **K** je jednak:



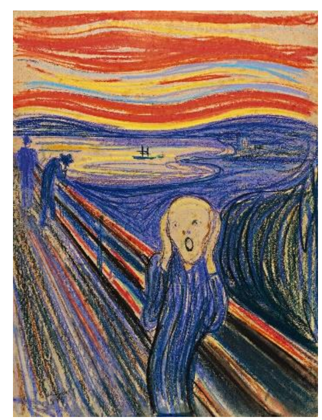

```
>> s=tf('s');
ss1=ss(A-B*K,K(2)*B,C,0);
>> bandwidth(ss1)
[P Q]=ss2tf(A-B*K,B,C,0)
B =
         0         0  312.5000
Q =
    1.0000    9.3200   43.4312
```

Uticaj konstantnih poremaćaja i šuma



$$E_{ry}(s) = R(s) - Y(s) = \frac{1}{1 + C(s)W(\mathrm{s})} R(s) - \frac{W(s)}{1 + C(s)W(\mathrm{s})} D(s) + \frac{C(s)W(s)}{1 + C(s)W(\mathrm{s})} N(s).$$

Veći propusni opseg („lijevlji“ polovi) obezbjeđuje manje izobličenje i bolje praćanje referentnog signala. Istovremeno, takav sistem je robusniji na poremećaje. Takođe, sa povećanjenom propusnog opsega unosimo i više mjernog šuma u sistem.



Moramo praviti kompromise!

Kako? Šta je optimalno?